| Épreuve de Maths | Royaume du Maroc | Examen National du |
|---|---|---|
| Filières : SMA - SMB | Ministère de l'Éducation Nationale | BACCALAURÉAT |
| Coefficient : 9 | De la Formation professionnelle | Session Principale |
| Durée : 4 heures | de l'Eseignement supérieur & de la Recherche scientifique | Juin 2003 |

## ■ Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

On aimerait bien résoudre dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E) définie ainsi :

$$(E)\ :\quad x^2(x^2+7) = y(2x+y)$$

**1** Soit $(x,y)$ un élément de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et soit $\delta = PGCD(x,y)$.
On pose : $x = \delta a \quad et \quad y = \delta b$ .
On suppose que le couple $(x,y)$ est une solution de l'équation (E).

0,50 **a** Vérifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a+b)$.

0,50 **b** En déduire l'existence d'un entier naturel $k$ tel que :

$$2a + b = ka^2 \quad et \quad \delta^2 a^2 + 7 = kb$$

0,50 **c** En déduire que : $a = 1$.

0,75 **d** En déduire que : $(b+1)^2 = \delta^2 + 8$ .

0,75 **2** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ l'équation (E).

## ■ Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
On considère la courbe (E) d'équation : $y = \frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$ .

0,75 **1 a** Montrer que (E) est une partie d'une ellipse qu'on déterminera.

0,50 **b** Tracer la courbe (E).

Soit A(4,0) et B(0,3) deux points du plan.

Soit $M_1(x_1)$ un point de la courbe (E) tel que $x_1$ soit dans [0,4].

On pose $x_1 = 4cos(t_1)$ avec $0 \le t_1 \le \pi/2$.

On considère l'intégrale suivante : $I(x_1) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_{x_1}^{4} \sqrt{16-x^2}\, dx$

1,00 **2 a** Par le changement de variable $x = 4cos(t)$ ; $0 \le t_1 \le \pi/2$ ;
Montrer que : $I(x_1) = 6t_1 - 3\sin(2t_1)$ .

Soit $S(x_1)$ l'aire de la portion du plan délimitée par la courbe (E) et les droites (OA) et ($OM_1$). Et soit S l'aire de la portion délimitée par les droites (OA) et (OB) et la courbe (E).

0,25 **b** Vérifier que l'ordonnée du point $M_1$ est $3\sin(t_1)$.

0,25 **c** Calculer l'aire $S(x_1)$ en fonction de $t_1$.

0,25 **d** En déduire l'aire S.

0,25 **e** Montrer l'équivalence suivante : $S(x_1) = S/2 \iff t_1 = \pi/4$

0,25 **f** Déterminer les coordonnées du point $M_1$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ dans le cas où $t_1 = \pi/4$ .

## Exercice Numéro 3 : (04,50 points)

**Rappel** : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$ ; $1_{\mathbb{R}} = 1$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**I** **1ère partie** : Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0,75 **1** Montrer que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ et dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

0,25 **2** Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

0,50 **3** **a** Monter l'équivalence suivante : $x^2 + xy + y^2 = 0 \iff x = y = 0$

0,25 **b** Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $(E,+,\times)$.

0,50 **c** En déduire que $(E,+,\times)$ est un corps communtatif.

**II** **2ème partie** : Soit $\sigma$ un élément de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ .

0,25 **1** Monter que $(1,\sigma)$ est une base de l'espace vectoriel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

On considère l'application définie ainsi :

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & (E,+) & \longmapsto & (\mathbb{C},+) \\ & & M(a,b) & \longmapsto & a+\sigma b \end{array}$$

0,75 **2** Montrer que l'application $\psi$ est un isomorphisme de (E,+) vers (C,+).
On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2 - z + 1 = 0$.

0,75 **3** Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation et donner les solutions sous la forme exponentielle.

0,50 **4** On suppose dans cette question que $\sigma = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
Montrer que l'application $\psi$ est un homomorphisme de (E,x) vers (C,x).

## Exercice Numéro 4 : (08,50 points)

**I** Soit $f$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

0,50 **1** Calculer les limites : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *et* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

Puis déterminer les branches infinies de la courbe $(\mathcal{C})$.

0,25 **2 a** Montrer que : $\forall x \epsilon ]0,+\infty[$ ; $f'(x) = 4\left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)$

0,75 **b** Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.

0,75 **3** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions $\alpha$ *et* $\beta$ tels que : $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ .

0,50 **4** Déterminer l'équation de la tangente (T) de la courbe (C) en $x_0 = 1$ .

0,75 **5** Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,25 **II 1** Montrer que : $\forall t \epsilon [0,+\infty[$ ; $1 - t \le \dfrac{1}{t+1} \le 1$

0,50 **2** En déduire que : $\forall a \epsilon [0,+\infty[$ ; $a - \dfrac{a^2}{2} \le \ln(a+1) \le a$

**III** Soit $f_n$ la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{n\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} \quad ; \quad n \epsilon \mathbb{N} \quad et \quad n \ge 4$$

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction $f_n$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

0,50 **1** Étudier les variations de la fonction $f_n$ .

0,50 **2** Étudier la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ et montrer qu'il admet un point d'inflexion dont l'abscisse est $e^{5/6}$.

0,25 **3 a** Comparer les quantités $f_n(x)$ *et* $f_{n+1}(x)$ selon les valeurs de la variable x.

0,25 **b** En déduire la position relative de la courbe $(\mathcal{C}_n)$ par rapport à $(\mathcal{C}_{n+1})$.

0,50 **4** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions notées $u_n$ *et* $v_n$ telles que : $1 < u_n < \sqrt{e} < v_n$ .

0,50 **5** Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 4}$ est strictement décroissante.

0,25 **6 a** Montrer que : $(\forall n \ge 4)$ ; $\dfrac{(u_n-1)(3-u_n)}{2} \le \ln(u_n) \le (u_n - 1)$

0,25 **b** En déduire que : $(\forall n \ge 4)$ ; $\dfrac{(u_n)^2}{2n} \le (u_n - 1) \le \dfrac{(u_n)^2}{n(3-u_n)}$

0,25 **c** Montrer que : $(\forall n \ge 4)$ ; $\dfrac{1}{2n} \le (u_n - 1) \le \dfrac{e}{n}$

0,50 **d** En déduire que la suite $(u_n)_{n\ge 4}$ est convergente et donner sa limite.

0,50 **7 a** Montrer que : $(\forall n \ge 4)$ ; $v_n > e^{5/6}$

0,50 **b** En déduire de la limite suivante : $\lim_{n\infty}(v_n) = +\infty$